

ESERCIZI E COMPLEMENTI
per il corso di
ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
a.a. 2001-02

Prof. Flora Pempinelli
Dipartimento di Fisica
Università di Lecce

31 ottobre 2008

Indice

1	δ di Dirac	2
2	Sull'approssimazione di una funzione mediante funzioni ortogonali date	4
3	Sviluppo in serie di Fourier	6
4	Esercizi sulle serie di Fourier	8
5	Sviluppo in integrale di Fourier	10
6	Esercizi sulla trasformata di Fourier	11
7	Metodo di integrazione per serie	12
8	Richiami sulle Matrici	13
9	Polinomi di Hermite	15
10	Oscillatore armonico lineare	17
11	Esercizi sui valori medi	22
12	Esercizi sulle trasformazioni unitarie	25
13	Esercizi sul momento angolare	31
14	Esercizi su Teoria delle perturbazioni (indipendenti dal tempo)	33

1 δ di Dirac

È definita, nell'ambito della **teoria delle distribuzioni**, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad (1.1)$$

dove $f(x)$ è una funzione infinitamente derivabile e a supporto limitato.

Si ha quindi formalmente

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ +\infty & x = x_0 \end{cases}$$

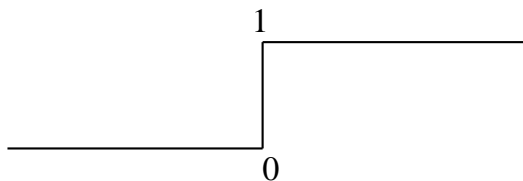
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)dx = 1$$

È il corrispondente del continuo del simbolo di Kronecker. Vengono date anche altre definizioni della δ ; quella precedente è rigorosa.

Vediamo alcune delle altre definizioni più comuni.

1. Derivata della funzione a scalino

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x) \quad (1.2)$$



La derivata è nulla ovunque tranne che nel punto di discontinuità dove vale ∞ .

Verifichiamo se è equivalente alla definizione precedente.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d\theta(x)}{dx}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\theta(x)dx &= f(0) \\ - \int_0^{+\infty} f'(x)dx &= f(0) \\ f(0) &= f(0) \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

2. Consideriamo una gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad \rightarrow \quad I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \\ &= \int e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = \pi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} d\rho^2 = \pi \end{aligned}$$

sicché

$$I = \sqrt{\pi}.$$

Definiamo

$$F(a, x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2} \quad (1.3)$$

e

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} F(a, x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2}. \quad (1.4)$$

Infatti si ha

$$\int \delta(x) \, dx = 1.$$

Inoltre l'altezza del picco, che è $a/\sqrt{\pi}$, tende a $+\infty$ per $a \rightarrow \infty$. La larghezza del picco

$$e^{-a^2 x^2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -a^2 x^2 = -\log 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{\sqrt{\log 2}}{a}$$

tende a zero per $a \rightarrow \infty$.

3. Definiamo la δ come

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin ax}{\pi x} \quad (1.5)$$

con a reale positivo. La funzione $\frac{\sin ax}{\pi x}$ assume il valore $\frac{a}{\pi}$ in $x = 0$ e oscilla con periodo $T = \frac{2\pi}{a}$ e ampiezza decrescente al crescere di $|x|$. Inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{\pi x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{ax} d(ax) = 1.$$

Per $a \rightarrow \infty$, diventa la δ . Infatti in $x = 0$ va a $+\infty$, il periodo $T \rightarrow 0$, le oscillazioni diventano infinitamente rapide e quindi tutto il contributo dell'integrale si restringe sempre più attorno al punto $x = 0$.

Proprietà della δ di Dirac

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx \quad (1.6)$$

Infatti si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} e^{ikx} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} 2 \frac{\sin ka}{k} = 2\pi \delta(k)$$

Altre proprietà

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad \text{funzione pari} \quad (1.7)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1.8)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'_n(x_n)|} \delta(x - x_n) \quad (1.9)$$

dove gli x_n sono gli zeri di $g(x)$ e deve essere $g'(x_n) \neq 0$

$$x\delta(x) = 0 \quad (1.10)$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \quad (1.11)$$

$$\int \delta(x-y)\delta(y-z)dy = \delta(x-z) \quad (1.12)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x-a) + \delta(x+a)] \quad (1.13)$$

2 Sull'approssimazione di una funzione mediante funzioni ortogonali date

Cerchiamo di rappresentare una funzione $f(x)$, in un certo intervallo finito $[a, b]$, mediante una serie convergente di funzioni ortonormali del tipo

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots$$

Questo studio non è facile. Si giunge però a risultati semplici ed interessanti, variando la richiesta sul resto:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) \quad (2.1)$$

Invece di richiedere che R_n sia piccolo, richiediamo solo che sia piccolo in media, ovvero che sia piccolo

$$I_n = \int_a^b |R_n(x)|^2 dx \quad (2.2)$$

Più precisamente, chiediamo che, dato un ϵ positivo e arbitrario, si possa trovare un n_0 tale che $\forall n > n_0$, I_n sia minore di ϵ , cioè che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

Questa è la “richiesta di convergenza in media”.

Poiché abbiamo supposto che le ϕ_n siano ortonormali, si ha che

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m^*(x)dx = \delta_{nm}. \quad (2.3)$$

Definiamo ora “coefficienti di Fourier” le seguenti espressioni

$$a_n = \int_a^b f(x)\phi_n^*(x)dx \quad (2.4)$$

e consideriamo

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) \right|^2 dx = \\
 &= \int_a^b |f(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left[c_k^* \int_a^b f(x) \phi_k^*(x) dx \right] = \\
 &= \int_a^b |f(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} [c_k^* a_k] \\
 &= \int_a^b |f(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^n |c_k - a_k|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2.
 \end{aligned}$$

Ricaviamo di qui alcune interessanti conseguenze:

1. Proprietà di minimo dei coefficienti di Fourier:

la migliore approssimazione si ottiene usando come c_k i coefficienti di Fourier. Infatti si ha

$$I_n^{(F)} = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x) \right|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 < I_n \quad (2.5)$$

2. Diseguaglianza di Bessel

Poiché $I_n^{(F)} \geq 0$, si ha che

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 < \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

qualunque sia n . Questa diseguaglianza ci assicura che, sotto la sola condizione che la $f(x)$ sia a quadrato integrabile, la serie dei moduli quadri dei coefficienti di Fourier è sempre convergente.

Si ha perciò la diseguaglianza di Bessel:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 < \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (2.6)$$

Nel caso particolare dell'uguaglianza, la relazione

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx \quad (2.7)$$

prende il nome di equazione di Parseval o relazione di completezza. Nel caso che valga questa equazione, il sistema delle $\phi_k(x)$ si dice completo.

Stabiliamo infine il seguente

Teorema 1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie*

$$a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots$$

converga in media alla funzione $f(x)$, è che il sistema ortonormale $\{\phi_k\}$ sia completo nei confronti di $f(x)$, ovvero che valga l'equazione di Parseval (2.7).

Dimostrazione:

Sufficienza: vale per ipotesi l'equazione di Parseval, perciò si ha:

$$\begin{aligned} I_n^{(F)} &\equiv \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x) \right|^2 dx = \\ &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|^2 < \epsilon \end{aligned}$$

poiché $\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|^2$ è il resto n -mo di una serie convergente. Perciò $I_n^{(F)} < \epsilon$, c.v.d.

Necessità. Supponiamo che non valga l'equazione di Parseval

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 = \eta > 0$$

Si ha allora

$$I_n^{(F)} \geq \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 = \eta > 0$$

e quindi $I_n^{(F)}$ non può essere reso minore di un ϵ arbitrario, il che è assurdo, c.v.d.

3 Sviluppo in serie di Fourier

Un caso particolare è dato quando il set delle autofunzioni coincide con il set delle autofunzioni dell'equazione dell'oscillatore armonico

$$y'' + \lambda y = 0$$

con condizioni al contorno del tipo β , cioè

$$y(\ell) = y(-\ell), \quad y'(\ell) = y'(-\ell).$$

Scriviamo queste autofunzioni nella forma

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos n\pi \frac{x}{\ell} \\ y_n^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin n\pi \frac{x}{\ell} \\ y_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\ell}} \end{aligned}$$

e incorporiamo il fattore $\frac{1}{\sqrt{\ell}}$ nei coefficienti.

Abbiamo così lo sviluppo in serie di Fourier o serie trigonometrica:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos n\pi \frac{x}{\ell} + b_n \sin n\pi \frac{x}{\ell} \right) \quad (3.1)$$

con

$$a_0 = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) dx \quad (3.2)$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \cos n\pi \frac{x}{\ell} dx \quad (3.3)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \sin n\pi \frac{x}{\ell} dx \quad (3.4)$$

Perché valga questo sviluppo in serie è sufficiente che siano soddisfatte le cosiddette condizioni di Dirichlet, ovvero è sufficiente che l'intervallo sia divisibile in segmenti in cui la $f(x)$ è continua e monotona.

Nel caso in cui la $f(x)$ sia pari o dispari, le formule per i coefficienti si semplificano così:
 $f(x)$ pari:

$$b_n = 0 \quad (3.5)$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx \quad (3.6)$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos n\pi \frac{x}{\ell} dx \quad (3.7)$$

$f(x)$ dispari:

$$a_0 = a_n = 0 \quad (3.8)$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin n\pi \frac{x}{\ell} dx \quad (3.9)$$

Se scriviamo invece le autofunzioni dell'oscillatore armonico nella forma esponenziale

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{2\ell}} e^{in\pi \frac{x}{\ell}} \quad (3.10)$$

dove n assume tutti i valori interi, anche quelli negativi, allora si ha la serie di Fourier in forma esponenziale:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi \frac{x}{\ell}} \quad (3.11)$$

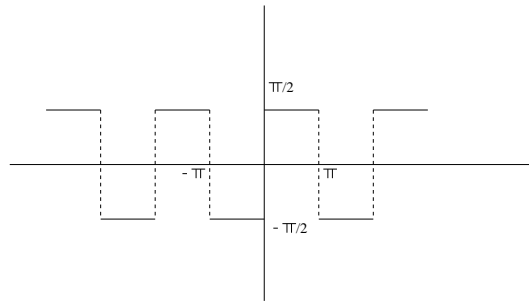
con

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) e^{-in\pi \frac{x}{\ell}} dx \quad (3.12)$$

Infine, se calcoliamo l'integrale $\int_{-\ell}^{+\ell} |f(x)|^2 dx$, troviamo

$$\int_{-\ell}^{+\ell} |f(x)|^2 dx = 2\ell \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (3.13)$$

cioè ritroviamo la relazione di completezza.



4 Esercizi sulle serie di Fourier

1. Trovare lo sviluppo di Fourier per l'onda quadra

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|} \quad \left(\equiv \frac{\pi}{2} \epsilon(x) \equiv \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) \right) \quad -\pi < x \leq \pi$$

Per

$$\begin{aligned} 0 < x < \pi & \quad f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ -\pi < x < 0 & \quad f(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

È una funzione dispari

$$f(-x) = -\frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|} = -f(x)$$

perciò abbiamo

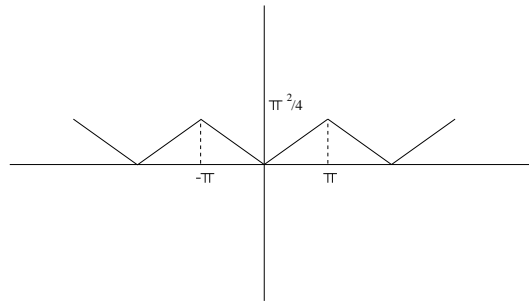
$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin nx \, dx \\ &= -\frac{1}{n} [\cos nx]_0^\pi = -\frac{1}{n} [(-1)^n - 1] = \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{2}{n} & n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

sicché

$$\frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|} = 2 \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

2. Trovare lo sviluppo di

$$f(x) = \frac{\pi}{4} |x| \quad -\pi \leq x \leq \pi$$



Si tratta di una funzione pari, quindi

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} x \, dx = \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$b_n = 0$$

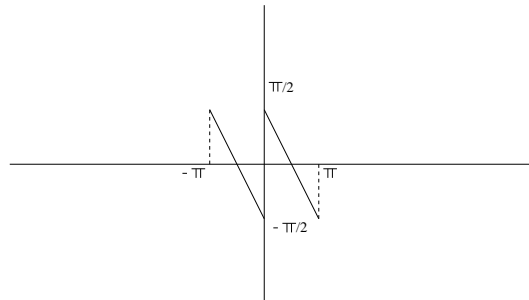
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} x \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{2n^2} [\cos nx]_0^{\pi} = \frac{1}{2n^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\frac{1}{n^2} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

e dunque

$$\frac{\pi}{4} |x| = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{1^2} \cos x - \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots$$

3. Trovare lo sviluppo di Fourier del dente di sega



$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{2} - x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Notiamo che è una funzione dispari, infatti

$$f(-x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x = -(-\frac{\pi}{2} - x) \\ -\frac{\pi}{2} + x = -(\frac{\pi}{2} - x) \end{cases} = -f(x)$$

perciò $a_n = 0$ e

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin nx \, dx \\
 &= \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi} \frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \\
 &= \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} (-1)^n - \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^\pi \\
 &= \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \frac{2}{n} & n \text{ pari} \end{cases}
 \end{aligned}$$

e in definitiva

$$f(x) = \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin 6x + \dots$$

5 Sviluppo in integrale di Fourier

È la naturale estensione dello sviluppo in serie di Fourier nel caso in cui vogliamo rappresentare una data funzione $f(x)$ (aperiodica) su un intervallo infinito

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (5.1)$$

Ricaviamo direttamente $c(\omega)$ moltiplicando per $e^{-i\omega'x}$ e integrando su dx ambo i membri

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega'x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega c(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} e^{-i\omega'x} dx = \\
 &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega c(\omega) \delta(\omega - \omega') \\
 &= 2\pi c(\omega')
 \end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (5.2)$$

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (5.3)$$

che sono dette formule per la trasformata di Fourier e la sua inversa.

Osserviamo inoltre che se $f(x)$ è pari (o dispari), anche $c(\omega)$ è pari (o dispari).

In questi due casi la trasformata di Fourier e la sua inversa prendono la forma $f(x)$ pari:

$$f(x) = 2 \int_0^{+\infty} c(\omega) \cos \omega x \, d\omega \quad (5.4)$$

$$c(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \quad (5.5)$$

$f(x)$ dispari:

$$f(x) = 2i \int_0^{+\infty} c(\omega) \sin \omega x \, d\omega \quad (5.6)$$

$$c(\omega) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \quad (5.7)$$

6 Esercizi sulla trasformata di Fourier

1. Trovare la trasformata di Fourier di una funzione di “cut-off”

$$f(x) = e^{-k|x|} \quad k > 0$$

Notiamo prima di tutto che $f(x)$ è una funzione pari. Abbiamo quindi

$$c(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \omega x \, dx$$

Calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\omega} e^{-kx} \sin \omega x \Big|_0^{+\infty} + \frac{k}{\omega} \int_0^{+\infty} e^{-kx} \sin \omega x \, dx \\ &= -\frac{k}{\omega^2} e^{-kx} \cos \omega x \Big|_0^{+\infty} - \frac{k^2}{\omega^2} \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \omega x \, dx \\ &= \frac{k}{\omega^2} - \frac{k^2}{\omega^2} I \end{aligned}$$

da cui

$$I = \frac{k}{\omega^2} \left(1 + \frac{k^2}{\omega^2} \right)^{-1} = \frac{k}{k^2 + \omega^2}$$

Otteniamo perciò

$$c(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{\omega^2 + k^2}$$

Notiamo, come risultato secondario, che, essendo $f(x) = 2 \int_0^{+\infty} c(\omega) \cos \omega x \, d\omega$ e quindi

$$e^{-k|x|} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + k^2} d\omega,$$

si ottiene un risultato non banale di calcolo integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + k^2} d\omega = \frac{\pi}{2k} e^{-k|x|}$$

2. Trovare la trasformata di Fourier di una gaussiana

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Notiamo che è una funzione pari. Tuttavia è più facile fare il conto usando la formula generale

$$\begin{aligned} c(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2} dx \end{aligned}$$

Poniamo $x + i\omega = y$, sicché

$$\begin{aligned} c(\omega) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \int_{-\infty+i\omega}^{+\infty+i\omega} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \sqrt{2\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$$

ovvero la trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana. Si ha quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} e^{i\omega x} d\omega \\ c(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x} dx \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cos \omega x d\omega \\ c(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \omega x dx. \end{aligned}$$

7 Metodo di integrazione per serie

Data l'equazione differenziale del tipo

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{7.1}$$

si cerca l'integrale generale ponendo

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \tag{7.2}$$

e si ha

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) c_{n+1} x^n \\ y'' &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Si sostituiscono queste espressioni nell'equazione e si pone a zero il coefficiente di ogni singola potenza x^n . Si determinano i coefficienti c_n in funzione dei primi due.

Esempio: $y'' - xy = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$c_2 = 0$$

$$(n+3)(n+2)c_{n+3} - c_n = 0$$

e quindi si ha subito

$$c_2 = c_5 = c_8 = \dots = 0.$$

Adesso imponiamo valori arbitrari a c_0 e c_1 in modo da ottenere due integrali particolari. La scelta abituale è $c_0 = 0, c_1 = 1$ e $c_0 = 1, c_1 = 0$. Abbiamo così

$$c_0 = c_3 = c_6 = c_9 = \dots = 0$$

$$c_1 = 1 \quad c_4 = \frac{1}{3 \cdot 4} \quad c_7 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \quad \dots$$

e

$$c_1 = c_4 = c_7 = \dots = 0$$

$$c_0 = 1 \quad c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} \quad c_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \quad \dots$$

Possiamo così scrivere l'integrale generale

$$y(x) = aR(x) + bS(x)$$

con

$$R(x) = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}x^9 + \dots$$

$$S(x) = x + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!}x^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!}x^{10} + \dots$$

8 Richiami sulle Matrici

Prodotto di due matrici

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \quad (8.1)$$

\tilde{A} : matrice trasposta = matrice con righe e colonne scambiate rispetto a quella originaria

$$(\tilde{a})_{ik} = a_{ki} \quad (8.2)$$

proprietà:

$$(\tilde{\tilde{A}}) = A$$

I : matrice identità o matrice unità = matrice tale che moltiplicata per un'altra matrice, la lascia invariata

$$I_{ik} = \delta_{ik}$$

A^{-1} : matrice inversa o reciproca. È definita dalla relazione $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Matrice ortogonale. È definita da $\tilde{A} = A^{-1}$

Proprietà:

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = I$$

Esempio: matrici di rotazione

$$x'_i = \lambda_{ij}x_j$$

Consideriamo il caso a 2 dimensioni

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} & \tilde{A} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ A\tilde{A} &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrice aggiunta o hermitiana coniugata. È definita da

$$A^\dagger = \tilde{A}^* \quad (8.3)$$

e i suoi elementi di matrice sono dati da

$$(a^\dagger)_{ij} = a_{ji}^*$$

L'asterisco denota l'operazione di complesso coniugato.

Matrice hermitiana. È definita da

$$A = A^\dagger \quad (8.4)$$

I suoi elementi godono della proprietà

$$a_{ij} = a_{ji}^*$$

Matrice unitaria. È definita da

$$AA^\dagger = AA^\dagger = I \quad (8.5)$$

Proprietà:

$$A^\dagger = A^{-1}$$

Richiamiamo qui un esempio di matrici molto usate in fisica, le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

Notiamo subito che sono hermitiane. Inoltre godono delle proprietà

a)

$$\sigma_j^2 = I \quad j = 1, 2, 3 \quad (8.7)$$

Esempio di verifica: σ_1^2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\sigma_k \sigma_j = i \epsilon_{kjl} \sigma_l \quad k \neq j \quad (8.8)$$

(ϵ_{kjl} è il tensore di Ricci) da cui si ricava che esse anticommutano tra di loro:

$$\{\sigma_k, \sigma_j\} = 0 \quad (8.9)$$

Esempio di verifica: $\sigma_1 \sigma_2$

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i \sigma_3$$

9 Polinomi di Hermite

Soddisfano all'equazione

$$H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2n H_n(\xi) = 0 \quad (9.1)$$

e alla relazione di ricorrenza tra i coefficienti

$$a_{n+2} = -\frac{2(n-r)}{(r+1)(r+2)} a_r \quad (9.2)$$

Sono generati dalla cosiddetta funzione generatrice (molto comoda)

$$S(\xi, s) \equiv e^{-s^2+2s\xi} = e^{\xi^2-(s-\xi)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi) \frac{s^n}{n!} \quad (9.3)$$

Verifichiamo che gli H_n soddisfano all'eq. (9.1). Infatti si ha che

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \xi} &= 2s e^{-s^2+2s\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n'(\xi) \frac{s^n}{n!} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} &= 4s^2 e^{-s^2+2s\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n''(\xi) \frac{s^n}{n!} \end{aligned}$$

Calcoliamo la quantità

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} [H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2n H_n(\xi)] \frac{s^n}{n!} = \\ &= (4s^2 - 4s\xi) e^{-s^2+2s\xi} + 2s \sum_{n=0}^{\infty} n H_n(\xi) \frac{s^{n-1}}{n!} \\ &= (4s^2 - 4s\xi) e^{-s^2+2s\xi} + 2s \frac{\partial S}{\partial s} \\ &= (4s^2 - 4s\xi) e^{-s^2+2s\xi} + 2s (-2s + 2\xi) e^{-s^2+2s\xi} \equiv 0 \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

Dimostriamo anche due formule utili

1.

$$H_n' = 2n H_{n-1} \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \xi} &= \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(\xi) \frac{s^n}{n!} = 2s e^{-s^2+2s\xi} = 2s \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi) \frac{s^n}{n!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} H_{n-1}(\xi) \frac{s^n}{(n-1)!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} n H_{n-1}(\xi) \frac{s^n}{n!}\end{aligned}$$

Per dimostrare la (9.4) basta ora identificare i coefficienti di s^n per ogni n .

2.

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2} (-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (9.5)$$

Notiamo che $\frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{\partial f}{\partial \xi}$ per ogni $f = f(s - \xi)$ quindi abbiamo

$$\frac{\partial^n S}{\partial s^n} = e^{\xi^2} \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-(s-\xi)^2} = e^{\xi^2} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} e^{-(s-\xi)^2}$$

Se ci mettiamo a $s = 0$, abbiamo

$$\left. \frac{\partial^n S}{\partial s^n} \right|_{s=0} = H_n(\xi)$$

e quindi otteniamo

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad \text{c.v.d.}$$

Calcoliamo ora due integrali utili

1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi$$

Si procede in questo modo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2+2s\xi} e^{-t^2+2t\xi} e^{-\xi^2} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^n t^m}{n! m!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2+2s\xi} e^{-t^2+2t\xi} e^{-\xi^2} d\xi &= e^{2st} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi-s-t)^2} d\xi \\ &= \sqrt{\pi} e^{2st} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2st)^n}{n!}\end{aligned}$$

Eguagliamo i coefficienti delle potenze di s e t . Otteniamo così

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} 2^n n! \quad (9.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = 0 \quad n \neq m \quad (9.7)$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) \xi H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi$$

Si procede in modo perfettamente analogo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2+2s\xi} e^{-t^2+2t\xi} \xi e^{-\xi^2} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^n t^m}{n! m!} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2+2s\xi} e^{-t^2+2t\xi} \xi e^{-\xi^2} d\xi &= e^{2st} (s+t) \sqrt{\pi} + e^{2st} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-(\xi-s-t)^2} (\xi-s-t) \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{s^{n+1} t^n + s^n t^{n+1}}{n!} \end{aligned}$$

Eguagliamo i coefficienti delle potenze di s e di t . Otteniamo così

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) \xi H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = \begin{cases} 2^n \sqrt{\pi} (n+1)! & m = n+1 \\ 2^{n-1} \sqrt{\pi} n! & m = n-1 \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases} \quad (9.8)$$

10 Oscillatore armonico lineare

Metodo dell'equazione di Schrödinger

Consideriamo l'equazione di Schrödinger nel caso particolare non dipendente dal tempo e a una sola dimensione

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x). \quad (10.1)$$

Esaminiamo il caso dell'oscillatore armonico lineare. È interessante perché è uno dei pochi problemi risolvibili esattamente e perché serve di base per altri problemi più complicati, che si possono solo risolvere con metodi approssimati. Sistemi più complicati possono essere spesso analizzati scomponendo il moto in serie di Fourier: ciò equivale a considerare i sistemi come costituiti da sovrapposizione di oscillatori armonici.

$V(x)$ vale in questo caso

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (10.2)$$

con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (10.3)$$

L'equazione di Schrödinger diventa

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} kx^2 - E \right) \psi = 0. \quad (10.4)$$

Cambiamo variabile

$$\xi = x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

ed otteniamo

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\epsilon - \xi^2)\psi = 0 \quad (10.5)$$

dove

$$\epsilon = \frac{2E}{\hbar\nu} = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

rappresenta l'energia misurata in unità di $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

Dobbiamo trovare le soluzioni dell'equazione (10.5), che siano finite e continue ovunque e che per $\xi \rightarrow \pm\infty$ tendano a zero. I coefficienti sono finiti ovunque tranne che per $\xi = \pm\infty$, dove capitano quindi le uniche singolarità dell'equazione. Queste singolarità sono di tipo non-Fuchsiano. Infatti, ponendo $z = 1/\xi$ si ha

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\psi}{dz} + \left(\frac{\epsilon}{z^4} - \frac{1}{z^6} \right) \psi = 0$$

Vediamo com'è il comportamento asintotico. Poniamo

$$\begin{aligned} \psi &= e^{\lambda\xi^2} \\ \psi' &= 2\lambda\xi e^{\lambda\xi^2} \\ \psi'' &= 4\lambda^2\xi^2 e^{\lambda\xi^2} + 2\lambda e^{\lambda\xi^2} \end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione di Schrödinger ed abbiamo

$$4\lambda^2\xi^2 + 2\lambda + \epsilon - \xi^2 = 0.$$

Per $\xi \rightarrow \pm\infty$ diventa

$$4\lambda^2\xi^2 + 2\lambda + \epsilon - \xi^2 \sim (4\lambda^2 - 1)\xi^2 = 0$$

e cioè

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{2}.$$

Perché le nostre soluzioni non divergano all' ∞ , scartiamo $\lambda = \frac{1}{2}$ e consideriamo solo $\lambda = -\frac{1}{2}$. Perciò la soluzione non asintotica viene cercata nella forma

$$\psi = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \sigma(\xi)$$

dove σ deve essere tale da soddisfare l'equazione esattamente e deve essere tale che $\psi \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Sostituiamo nell'equazione di Schrödinger ed otteniamo

$$\sigma'' - 2\xi\sigma' + (\epsilon - 1)\sigma = 0 \quad (10.6)$$

Integriamo quest'equazione usando uno sviluppo in serie

$$\sigma = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \xi^r \quad (10.7)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sum_{r=1}^{\infty} r a_r \xi^{r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} r a_r \xi^{r-1} \\ \sigma'' &= \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) a_r \xi^{r-2} = \sum_{r=0}^{\infty} (r+2)(r+1) a_{r+2} \xi^r. \end{aligned}$$

Quindi l'equazione (10.6) diventa

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(r+2)(r+1)a_{r+2} + (\epsilon - 1 - 2r)a_r] \xi^r = 0$$

da cui

$$a_{r+2} = \frac{2r+1-\epsilon}{(r+2)(r+1)} a_r \quad (10.8)$$

Due soluzioni particolari:

$$\begin{aligned} a_0 \neq 0 \quad a_1 = 0 &\rightarrow \text{serie di potenze pari} \\ a_0 = 0 \quad a_1 \neq 0 &\rightarrow \text{serie di potenze dispari.} \end{aligned}$$

La soluzione generale sarà combinazione lineare di queste due soluzioni integrali particolari con 2 costanti arbitrarie. Ma queste serie per $\xi \rightarrow \pm\infty$ hanno singolarità essenziali e la ψ non tenderà a zero. Perché la ψ tenda a zero, bisogna che la serie si riduca ad un polinomio (singolarità non essenziale, domina $e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$) e perciò si deve annullare un coefficiente ed i successivi. Perché sia $a_{n+2} = 0$ ma $a_n \neq 0$ si deve avere che

$$\epsilon = 2n + 1 \quad (10.9)$$

Gli autovalori sono perciò tutti gli interi positivi dispari. Scritta per E diventa

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.10)$$

cioè otteniamo i livelli di energia per l'oscillatore armonico lineare.

Per $n = 0$,

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \neq 0 \quad \text{energia del punto zero}$$

ed è conseguenza del principio di indeterminazione.

La serie degli autovalori ha gli stessi intervalli postulati da Planck, e dati dalla teoria di Bohr-Sommerfeld, ma l'energia del punto zero è caratteristica della meccanica quantistica. (Anche per la buca di potenziale a pareti ∞ si verifica che l'energia del punto zero sia $\neq 0$).

Vediamo come questo valore derivi dal principio di indeterminazione.

L'energia E è dell'ordine

$$\begin{aligned} E &\sim \frac{1}{2} \left[\frac{(\Delta p)^2}{m} + k(\Delta x)^2 \right] & \Delta p \Delta x &\sim \frac{\hbar}{2} \\ E &\sim \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{k\hbar^2}{8(\Delta p)^2} \end{aligned}$$

E_{\min} si ha per

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{m} - \frac{k\hbar^2}{4(\Delta p)^3} = 0 &\rightarrow (\Delta p)^4 = \frac{1}{4} k\hbar^2 m \\ (\Delta p)^2 &= \frac{1}{2} \hbar \sqrt{km}. \end{aligned}$$

Perciò

$$E_{\min} \sim \frac{1}{4} \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{1}{4} \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

Passiamo ad esaminare le autofunzioni. Poiché $\epsilon = 2n + 1$ la formula di ricorrenza (10.8) ci dà

$$a_{r+2} = -\frac{2(n-r)}{(r+1)(r+2)}a_r \quad (10.11)$$

L'eq. (10.6) diventa (σ per un dato n diventa H_n)

$$H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2nH_n(\xi) = 0$$

con $H_n(\xi)$ n -mo polinomio di Hermite.

È chiaro che qui sono definiti a meno di una costante moltiplicativa arbitraria.

Il polinomio è pari o dispari a seconda che n sia pari o dispari. Poiché $e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ è pari, $\psi_n(\xi)$ ha la stessa parità di n . I primi polinomi sono

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 & H_1 &= 2\xi \\ H_2 &= -2 + 4\xi^2 & H_3 &= -12\xi + 8\xi^3 \quad \dots \end{aligned}$$

e si possono ricavare dalla formula

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2} (-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}. \quad (10.12)$$

L'autofunzione corrispondente ad un autovalore E_n è data da

$$\psi_n = \frac{1}{N_n} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad (10.13)$$

dove N_n è un fattore di normalizzazione. Determiniamolo

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{1}{|N_n|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n^2(\xi)$$

da cui

$$|N_n|^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{\pi} 2^n n!$$

e perciò

$$N_n = \left(\frac{\pi \hbar}{m\omega} \right)^{\frac{1}{4}} (2^n n!)^{\frac{1}{2}}. \quad (10.14)$$

In modo analogo si verifica l'ortogonalità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = 0 \quad n \neq m \quad (10.15)$$

Le prime autofunzioni sono riportate in Fig.1.

Confrontiamo ora la densità di probabilità di posizione $|\psi_n|^2$ rispetto a quella classica: la zona permessa classicamente è data da $(-A_n, A_n)$ con

$$A_n = \sqrt{\frac{2E_n^{\text{cl}}}{k}}$$

perché

$$E_n^{\text{cl}} = \frac{1}{2} m \omega^2 A_n^2 = \frac{1}{2} k A_n^2$$

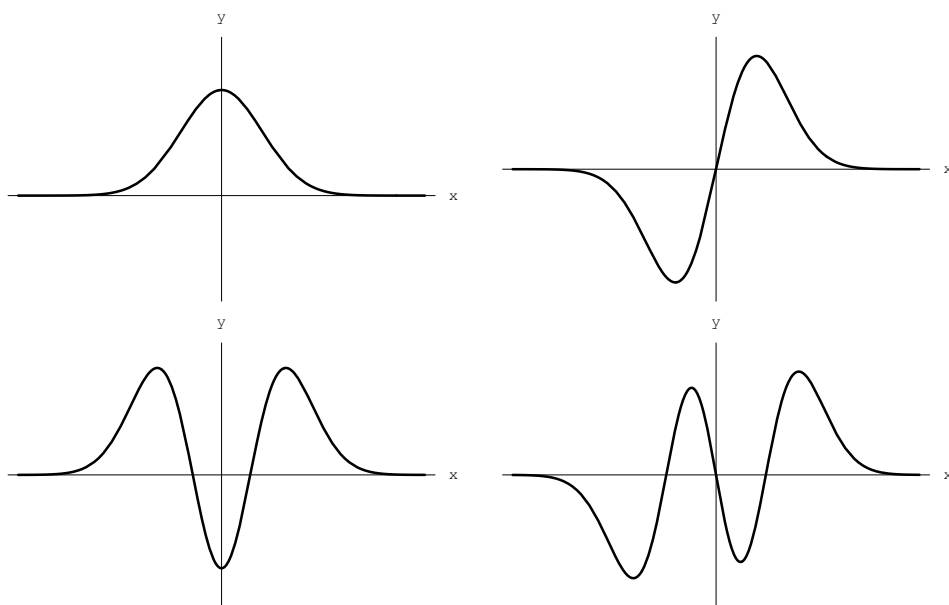


Figura 1: Autofunzioni dell'oscillatore armonico corrispondenti agli autovalori $n = 0, 1, 2, 3$

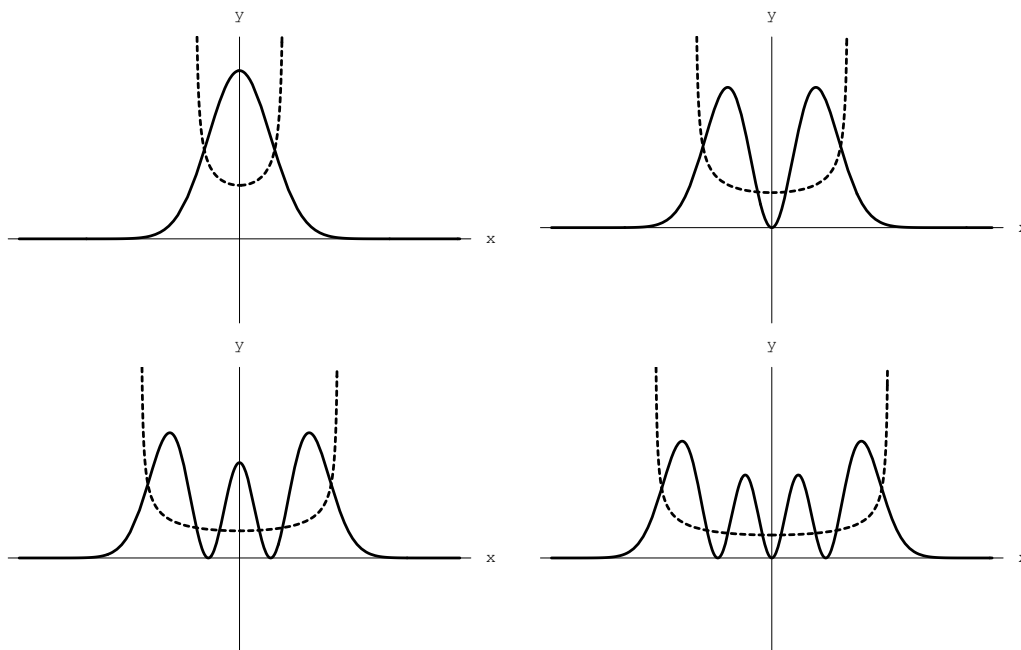


Figura 2: Densità di probabilità di posizione dell'oscillatore armonico corrispondenti agli autovalori $n = 0, 1, 2, 3$. Le curve tratteggiate corrispondono alla densità di probabilità classica

(oscillatore classico la cui energia è uguale all'autovalore di quello quantistico). In Fig.2 sono riportate le densità di probabilità di posizione corrispondenti ai primi autovalori.

Per grandi valori di n l'accordo tra la densità di probabilità classica e quantistica migliora rapidamente al crescere di n .

Già per $n = 10$ si incomincia ad avere un certo accordo in media (cf. Fig.3) e la principale differenza sta nelle rapide oscillazioni di $|\psi_n|^2$.

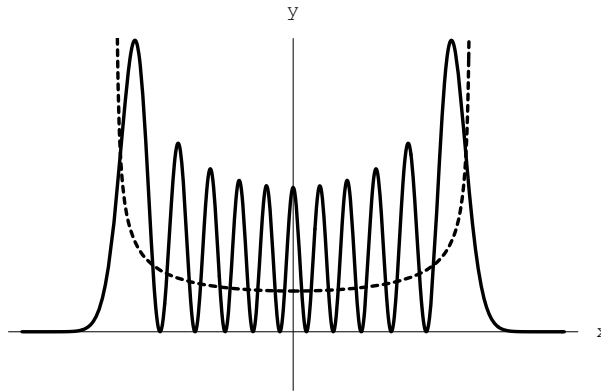


Figura 3: Densità di probabilità di posizione dell'oscillatore armonico corrispondente all'autovalore $n = 10$. La curva tratteggiata corrisponde alla densità di probabilità classica

Come si vede c'è una probabilità $\neq 0$ anche per zone proibite classicamente per cui $E_n - V < 0$. Si ha quindi un paradosso analogo a quello che accade per buche o barriere.

11 Esercizi sui valori medi

Il 1° esercizio è preliminare ai successivi.

1. La soluzione generale dell'equazione temporale di Schrödinger per l'oscillatore armonico lineare può essere espressa per mezzo delle funzioni d'onda stazionarie

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(x) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} = e^{-\frac{i}{\hbar} \omega t} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(x) e^{-in\omega t}$$

con

$$\begin{aligned} A_n &= \text{costanti arbitrarie} \\ E_n &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \\ \psi_n &= \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \right)^{\frac{1}{2}} H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \end{aligned}$$

Trovare una soluzione particolare che abbia la forma di un pacchetto d'onde, il cui baricentro oscilla con frequenza classica ω .

Supponiamo che a $t = 0$, la Ψ abbia la forma del pacchetto minimo normalizzato, a parte il fatto che il baricentro sia spostato di x_0 nella direzione delle x positive

$$\Psi(x, 0) = \sum_n A_n \psi_n(x) = \psi_0 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(x-x_0)^2}$$

Per calcolare un A_m generico, usiamo la ortonormalità delle ψ_n , dopo aver posto

$$\xi = \alpha x$$

$$A_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x) \Psi(x, 0) dx = \frac{N_m}{\pi^{1/4} \alpha^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} e^{-\frac{1}{2}(\xi-\xi_0)^2} d\xi$$

dove con N_m abbiamo indicato il fattore di normalizzazione

$$N_m = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^m m!} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Calcoliamo l'integrale col solito metodo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2+2s\xi} e^{-(\xi^2-\xi\xi_0+\xi_0^2/2)} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) e^{-(\xi^2-\xi\xi_0+\xi_0^2/2)} d\xi$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2+2s\xi} e^{-(\xi^2-\xi\xi_0+\xi_0^2/2)} d\xi &= e^{-(\xi_0^2/4)+s\xi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi-s-\xi_0/2)^2} d\xi \\ &= \sqrt{\pi} e^{-\xi_0^2/4+s\xi_0} = \sqrt{\pi} e^{-\xi_0^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n \xi_0^n}{n!} \end{aligned}$$

Eguagliamo i coefficienti delle potenze di s ed otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) e^{-(\xi^2-\xi\xi_0+\xi_0^2/2)} d\xi = \sqrt{\pi} \xi_0^n e^{-\xi_0^2/4}$$

e quindi

$$A_m = \frac{\xi_0^m e^{-\xi_0^2/4}}{(2^m m!)^{\frac{1}{2}}}. \quad (11.1)$$

Sostituiamo in $\Psi(x, t)$

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{i}{2}\omega t} e^{-\xi_0^2/4} e^{-\xi^2/2} \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{2^n n!} \xi_0^n e^{-in\omega t}.$$

Usiamo la formula della funzione generatrice con $s = \frac{\xi_0}{2} e^{-i\omega t}$ ed abbiamo

$$\Psi(x, t) = \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{\xi_0^2}{4} - \frac{\xi^2}{2} - \frac{i\omega t}{2} - \frac{\xi_0^2}{4} e^{-2i\omega t} + \xi \xi_0 e^{-i\omega t}\right].$$

In definitiva si ha

$$\Psi(x, t) = \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi - \xi_0 \cos \omega t)^2 - i\left(\frac{1}{2}\omega t + \xi \xi_0 \sin \omega t - \frac{\xi_0^2}{4} \sin 2\omega t\right)\right]$$

Si ha quindi per la densità di probabilità di posizione

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2(x-x_0 \cos \omega t)^2}$$

e cioè si ha un pacchetto d'onde che oscilla intorno al punto $x = 0$ con ampiezza x_0 e frequenza classica ω .

2. Calcolare il valor medio dell'energia per l'oscillatore armonico dipendente dal tempo (con i coefficienti A_n della forma trovata nell'esercizio 1)).

$$\langle E \rangle = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle,$$

quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int dx \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(x) A_n \hat{H} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x) A_m e^{i(n-m)\omega t} \\ &= \sum_{n,m} A_n A_m e^{i(n-m)\omega t} E_m \int dx \psi_n^* \psi_m \\ &= \sum_n A_n^2 E_n \\ &= \sum_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \left(\frac{e^{-\xi_0^2/4} \xi_0^n}{(2^n n!)^{1/2}} \right)^2 \\ &= \hbar \omega^{-\xi_0^2/2} \left\{ \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{\xi_0^2}{2} \right)^n \frac{1}{n!} + \frac{\xi_0^2}{2} \sum_n \left(\frac{\xi_0^2}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{1}{2} \xi_0^2 \hbar \omega \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \end{aligned}$$

Il valore medio dell'energia risulta quindi essere il valore classico più il valore del livello zero.

3. Calcolare il valor medio della posizione per l'oscillatore armonico dipendente dal tempo (con i coefficienti A_n della forma trovata nell'esercizio 1)).

$$\langle x(t) \rangle = \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle,$$

quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \int dx x \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n^*(x) \sum_{m=0}^{\infty} A_m \psi_m(x) e^{i(n-m)\omega t} \\ &= \sum_{n,m} A_n A_m e^{i(n-m)\omega t} \int dx \psi_n^* x \psi_m. \end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare l'integrale, usando un integrale già calcolato nel paragrafo dei polinomi di Hermite

$$\begin{aligned}
\int dx \psi_n^* x \psi_m &= N_n N_m \int dx e^{-\alpha^2 x^2} x H_n(\alpha x) H_m(\alpha x) \\
&= \frac{N_n N_m}{\alpha^2} \int d\xi e^{-\xi^2} \xi H_n(\xi) H_m(\xi) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{n+1}{2}} & m = n + 1 \\ \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{n}{2}} & m = n - 1 \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases}
\end{aligned}$$

Utilizziamo questo risultato:

$$\begin{aligned}
\langle x(t) \rangle &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n,m} A_n A_m e^{i(n-m)\omega t} \left[\sqrt{\frac{n+1}{2}} \delta_{m,n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}} \delta_{m,n-1} \right] \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_n \left[A_n A_{n+1} e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{n+1}{2}} + A_n A_{n-1} e^{i\omega t} \sqrt{\frac{n}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{\alpha} e^{-\xi_0^2/2} \left\{ e^{-i\omega t} \sum_n \frac{\xi_0^{2n+1}}{(2^n 2^{n+1} n! (n+1)!)^{1/2}} \sqrt{\frac{n+1}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + e^{i\omega t} \sum_n \frac{\xi_0^{2n-1}}{(2^n 2^{n-1} n! (n-1)!)^{1/2}} \sqrt{\frac{n}{2}} \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} e^{-\xi_0^2/2} \left\{ e^{-i\omega t} \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2}} \right)^{2n+1} + e^{i\omega t} \sum_n \left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2}} \right)^{2n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right\} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\alpha} e^{-\xi_0^2/2} \frac{\xi_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{\xi_0^2}{2} \right)^n \\
&= \frac{\xi_0}{\alpha} \cos \omega t = x_0 \cos \omega t.
\end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$\langle x(t) \rangle = x_0 \cos \omega t$$

Il valor medio oscilla nel tempo con la frequenza classica dell'oscillatore.

12 Esercizi sulle trasformazioni unitarie

Premettiamo un breve pro-memoria

a) Definizione:

La trasformazione

$$|\psi' \rangle = U |\psi \rangle$$

si dice unitaria, se l'operatore U gode della proprietà

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \quad (12.1)$$

b) È conservata la norma degli stati

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$$

c) Valori medi e legge di trasformazione per gli operatori

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \psi' | (U^\dagger)^{-1} A U^{-1} | \psi' \rangle = \langle \psi' | U A U^{-1} | \psi' \rangle = \langle \psi' | A' | \psi' \rangle$$

dove

$$A' = U A U^{-1} \quad (12.2)$$

d) È conservata l'hermiticità degli operatori; infatti, se $A = A^\dagger$

$$(A')^\dagger = (U A U^{-1})^\dagger = (U^{-1})^\dagger A^\dagger U^\dagger = U A U^{-1} = A'$$

e) Ogni operatore della forma

$$U = e^{iR}$$

dove R è un operatore hermitiano è un operatore unitario.

Infatti si ha

$$U^\dagger = e^{-iR^\dagger} = e^{-iR} = U^{-1}$$

Esercizi

1. Trovare l'operatore unitario T_a che effettui una traslazione di una distanza finita \vec{a} , espresso in termini dell'operatore impulso.

Sia

$$T_a \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{a})$$

Effettuiamo uno sviluppo in serie di Taylor:

$$\psi(\vec{r} + \vec{a}) = \psi(\vec{r}) + \vec{a} \cdot \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial \vec{r}} + \dots$$

Ricordiamo ora che

$$\widehat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r} + \vec{a}) &= \left[1 + \frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \widehat{p} + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \widehat{p} \right)^2 + \dots \right] \psi(\vec{r}) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \widehat{p}} \psi(\vec{r}). \end{aligned}$$

Perciò otteniamo

$$T_a = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \widehat{p}}$$

L'operatore è unitario, perché l'operatore \widehat{p} è hermitiano.

2. Trovare l'operatore unitario T_τ che generi una traslazione temporale finita τ .
-

Sia

$$T_\tau \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t + \tau).$$

Procediamo in modo analogo, ricordando che $\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t + \tau) &= \Psi(\vec{r}, t) + \tau \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \dots \\ &= \left[1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \tau + \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \tau \right)^2 + \dots \right] \Psi(\vec{r}, t) \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \tau \hat{H}} \Psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$T_\tau = e^{-\frac{i}{\hbar} \tau \hat{H}}.$$

L'operatore T_τ è unitario perché l'operatore \hat{H} è hermitiano.

3. Trovare l'operatore unitario che genera una rotazione finita ϕ_0 attorno all'asse z .
-

Sia

$$U_{\phi_0} \psi(r, \theta, \phi) = \psi(r, \theta, \phi + \phi_0).$$

Procediamo sempre in modo analogo, ricordando che $\hat{\ell}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi + \phi_0) &= \psi(r, \theta, \phi) + \phi_0 \frac{\partial \psi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} + \dots \\ &= \left[1 + \frac{i}{\hbar} \hat{\ell}_z \phi_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar} \hat{\ell}_z \phi_0 \right)^2 + \dots \right] \psi(r, \theta, \phi) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \phi_0 \hat{\ell}_z} \psi(r, \theta, \phi). \end{aligned}$$

Abbiamo perciò

$$U_{\phi_0} = e^{\frac{i}{\hbar} \phi_0 \hat{\ell}_z}$$

L'operatore U_{ϕ_0} è unitario perché l'operatore $\hat{\ell}_z$ è hermitiano.

Questo operatore può essere subito generalizzato per una rotazione ϕ_0 attorno ad un asse qualsiasi individuato dal vettore \vec{n}

$$U_{\phi_0} = e^{\frac{i}{\hbar} \phi_0 \vec{\ell} \cdot \vec{n}}$$

4. Determinare la legge di trasformazione della funzione d'onda piana in una trasformazione di Galileo.
-

Indichiamo con lettere con apici le grandezze relative al sistema di riferimento che si muove con velocità relativa \vec{V} = costante rispetto al sistema originario.

Trasformazione di Galileo:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}' + \vec{V}t \\ t &= t'.\end{aligned}$$

Sia

$$\begin{aligned}\Psi &= \text{cost } e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \\ \Psi' &= \text{cost } e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}' \cdot \vec{r}' - E't)}.\end{aligned}$$

Si ha inoltre ovviamente

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{p}' + m\vec{V} \\ E &= E' + \frac{1}{2}mV^2 + \vec{p}' \cdot \vec{V}.\end{aligned}$$

Sostituiamo

$$\begin{aligned}\Psi &= e^{\frac{i}{\hbar}[mV^2t + \vec{p}' \cdot \vec{V}t + m\vec{r}' \cdot \vec{V} - \frac{1}{2}mV^2t - \vec{p}' \cdot \vec{V}t]}\Psi' \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}m[\vec{V} \cdot \vec{r}' + \frac{1}{2}\vec{V} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')]}\Psi' = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}[\vec{V} \cdot (\vec{r} + \vec{r}')]}\Psi'.\end{aligned}$$

5. Dato un oscillatore armonico di carica q , sottoposto ad un campo elettrico uniforme \mathcal{E} , costruire la trasformazione unitaria che riduce il problema a quello di un oscillatore libero. Determinare autovalori e autofunzioni.

In questo problema e nel seguente, per trovare la trasformazione unitaria, ci si è basati sull'analogia col problema classico. Sia

$$\hat{H} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} - q\mathcal{E}\hat{x}$$

Eseguiamo una traslazione

$$U = e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}$$

con a da determinare in maniera opportuna. Nella rappresentazione degli impulsi si ha

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= U\hat{H}U^{-1} = e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{p}} \left(-\frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2 \frac{d^2}{d\hat{p}^2} + \frac{\hat{p}^2}{2m} - i\hbar q\mathcal{E} \frac{d}{d\hat{p}} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}} \\ &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2a^2 + im\omega^2\hbar a \frac{d}{d\hat{p}} - \frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2 \frac{d^2}{d\hat{p}^2} - i\hbar q\mathcal{E} \frac{d}{d\hat{p}} - q\mathcal{E}a\end{aligned}$$

Determiniamo a in modo da eliminare i termini con la derivata prima, che non devono comparire nell'hamiltoniana di un oscillatore libero

$$a = \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$$

e quindi

$$U = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\hat{p}}.$$

Così si ha

$$\hat{H}' = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2}$$

e in definitiva

$$\hat{H}' = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2}.$$

Quindi per gli autovalori e le autofunzioni dell'oscillatore carico si ottiene

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{1}{2}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2}$$

$$\varphi_n(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\hat{p}}\psi_n(x)$$

dove le $\psi_n(x)$ sono le autofunzioni dell'oscillatore libero.

6. Dati due oscillatori armonici di frequenza ω_1 e ω_2 rispettivamente e massa m_1 e m_2 rispettivamente e termine di accoppiamento del tipo $g\hat{q}_1\hat{q}_2$, determinare la trasformazione unitaria che disaccoppia i due oscillatori. Determinare autovalori e autofunzioni.

Scriviamo l'hamiltoniana usando degli apici e cerchiamo di ripulirla dalle costanti:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}'_1{}^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}'_2{}^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2\hat{q}'_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2\hat{q}'_2{}^2 + g'\hat{q}'_1\hat{q}'_2.$$

Sia

$$\hat{q}_1 = \hat{q}'_1\sqrt{m_1}, \quad \hat{q}_2 = \hat{q}'_2\sqrt{m_2}, \quad \hat{p}_1 = \frac{\hat{p}'_1}{\sqrt{m_1}}, \quad \hat{p}_2 = \frac{\hat{p}'_2}{\sqrt{m_2}}, \quad g = \frac{g'}{\sqrt{m_1m_2}}.$$

Otteniamo così

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2}(\omega_1^2\hat{q}_1^2 + \omega_2^2\hat{q}_2^2) + g\hat{q}_1\hat{q}_2$$

Effettuiamo una rotazione

$$U = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\ell}_3\theta}, \quad \hat{\ell}_3 = \hat{q}_1\hat{p}_2 - \hat{p}_1\hat{q}_2$$

con θ parametro da determinare in modo opportuno.

Usiamo l'identità (che si verifica banalmente) tra operatori

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots$$

Ricordando che $[\hat{\ell}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{p}_k$ (vedi anche esercizio 1 paragrafo seguente), abbiamo

$$\begin{aligned} U\hat{p}_1U^{-1} &= \hat{p}_1 + \frac{i}{\hbar}\theta[\hat{\ell}_3, \hat{p}_1] + \frac{i^2}{\hbar^2}\frac{\theta^2}{2!}[\hat{\ell}_3, [\hat{\ell}_3, \hat{p}_1]] + \dots \\ &= \hat{p}_1 \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right] - \hat{p}_2 \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right] \\ &= \hat{p}_1 \cos\theta - \hat{p}_2 \sin\theta. \end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$\begin{aligned}
U\hat{p}_1U^{-1} &= \hat{p}_1 \cos \theta - \hat{p}_2 \sin \theta \\
U\hat{p}_2U^{-1} &= \hat{p}_2 \cos \theta + \hat{p}_1 \sin \theta \\
U\hat{q}_1U^{-1} &= \hat{q}_1 \cos \theta - \hat{q}_2 \sin \theta \\
U\hat{q}_2U^{-1} &= \hat{q}_2 \cos \theta + \hat{q}_1 \sin \theta.
\end{aligned}$$

Abbiamo perciò per H

$$\begin{aligned}
\hat{H}' &= U\hat{H}U^{-1} = \frac{1}{2} [U\hat{p}_1U^{-1}U\hat{p}_1U^{-1} + U\hat{p}_2U^{-1}U\hat{p}_2U^{-1}] + \\
&\quad + \frac{1}{2} [\omega_1^2 U\hat{q}_1U^{-1}U\hat{q}_1U^{-1} + \omega_2^2 U\hat{q}_2U^{-1}U\hat{q}_2U^{-1}] + \\
&\quad + gU\hat{q}_1U^{-1}U\hat{q}_2U^{-1} \\
&= \frac{1}{2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2} \hat{q}_1^2 (\omega_1^2 \cos^2 \theta + \omega_2^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} \hat{q}_2^2 (\omega_1^2 \sin^2 \theta + \omega_2^2 \cos^2 \theta) \\
&\quad + \hat{q}_1 \hat{q}_2 \cos \theta \sin \theta (\omega_2^2 - \omega_1^2) + g\hat{q}_1^2 \cos \theta \sin \theta - g\hat{q}_2^2 \cos \theta \sin \theta + \\
&\quad + g\hat{q}_1 \hat{q}_2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).
\end{aligned}$$

Perciò dobbiamo imporre che θ abbia il valore dato dalla relazione

$$\frac{1}{2} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \sin 2\theta = g \cos 2\theta$$

ovvero

$$\tan 2\theta = \frac{2g}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2g}{\omega_1^2 - \omega_2^2}.$$

Si ha così

$$\begin{aligned}
\hat{H}' &= \frac{1}{2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2} \hat{q}_1^2 (\omega_1^2 \cos^2 \theta + \omega_2^2 \sin^2 \theta + g \sin 2\theta) + \frac{1}{2} \hat{q}_2^2 (\omega_1^2 \sin^2 \theta + \omega_2^2 \cos^2 \theta - g \sin 2\theta) \\
&= \frac{1}{2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2} \hat{q}_1^2 \omega_I^2 + \frac{1}{2} \hat{q}_2^2 \omega_{II}^2
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\omega_I^2 &= \omega_1^2 \cos^2 \theta + \omega_2^2 \sin^2 \theta + g \sin 2\theta \\
\omega_{II}^2 &= \omega_1^2 \sin^2 \theta + \omega_2^2 \cos^2 \theta - g \sin 2\theta
\end{aligned}$$

Gli autovalori e le autofunzioni degli oscillatori accoppiati sono quindi dati da

$$\begin{aligned}
E_{n_I n_{II}} &= \hbar \left(n_I \omega_I + n_{II} \omega_{II} + \frac{1}{2} \omega_I + \frac{1}{2} \omega_{II} \right) \\
\phi_{n_I n_{II}}(q_1, q_2) &= e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{\ell}_3} \psi_{n_I}(q_1) \psi_{n_{II}}(q_2)
\end{aligned}$$

dove $\psi_{n_I}(q_1)$ e $\psi_{n_{II}}(q_2)$ sono le autofunzioni degli oscillatori armonici liberi.

Per $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ si ha $\theta = \frac{\pi}{4}$ e l' \hat{H}' diventa più semplicemente

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2} \hat{q}_1^2 (\omega^2 + g) + \frac{1}{2} \hat{q}_2^2 (\omega^2 - g)$$

13 Esercizi sul momento angolare

1. Trovare i commutatori di $\hat{\ell}_i$ con $\hat{r}_j, \hat{p}_j, \hat{\ell}_j$ e $\hat{\ell}^2$.

Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} [\hat{q}_i, \hat{q}_j] &= 0, & [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0, & [\hat{q}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij} \\ \widehat{\vec{\ell}} &= \hat{r} \times \hat{p} & \hat{\ell}_i &= \epsilon_{ijk} \hat{r}_j \hat{p}_k \end{aligned}$$

Passiamo a calcolare i vari commutatori (per comodità tralasciamo i simboli \wedge).

a)

$$\begin{aligned} [\ell_i, r_j] &= \epsilon_{ihk} [r_h p_k, r_j] = \epsilon_{ihk} \{ [r_h, r_j] p_k + r_h [p_k, r_j] \} \\ &= \epsilon_{ihk} r_h \delta_{kj} (-i\hbar) = -i\hbar \epsilon_{ihj} r_h = i\hbar \epsilon_{ijh} r_h \end{aligned}$$

cioè

$$[\ell_i, r_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} r_k \quad (13.1)$$

b)

$$\begin{aligned} [\ell_i, p_j] &= \epsilon_{ihk} [r_h p_k, p_j] = \epsilon_{ihk} \{ [r_h, p_j] p_k + r_h [p_k, p_j] \} \\ &= \epsilon_{ihk} p_k \delta_{hj} (i\hbar) = i\hbar \epsilon_{ijk} p_k \end{aligned}$$

cioè

$$[\ell_i, p_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} p_k \quad (13.2)$$

c)

$$\begin{aligned} [\ell_i, \ell_j] &= \epsilon_{imn} [r_m p_n, \ell_j] = \epsilon_{imn} \{ [r_m, \ell_j] p_n + r_m [p_n, \ell_j] \} \\ &= i\hbar \epsilon_{imn} \{ \epsilon_{mjk} r_k p_n + \epsilon_{njk} r_m p_k \} \\ &= -i\hbar \{ \epsilon_{min} \epsilon_{mjk} r_k p_n - \epsilon_{nim} \epsilon_{njk} r_m p_k \} \\ &= -i\hbar \{ (\delta_{ij} \delta_{nk} - \delta_{ik} \delta_{nj}) r_k p_n - (\delta_{ij} \delta_{mk} - \delta_{ik} \delta_{mj}) r_m p_k \} \\ &= -i\hbar \{ \delta_{ij} (\vec{r} \cdot \vec{p}) - r_i p_j - \delta_{ij} (\vec{r} \cdot \vec{p}) + r_j p_i \} \\ &= -i\hbar (r_j p_i - r_i p_j) = i\hbar \epsilon_{ijk} \ell_k \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} [\ell^2, \ell_3] &= [\ell_1^2, \ell_3] + [\ell_2^2, \ell_3] + [\ell_3^2, \ell_3] = \ell_1 [\ell_1, \ell_3] + [\ell_1, \ell_3] \ell_1 \\ &\quad + \ell_2 [\ell_2, \ell_3] + [\ell_2, \ell_3] \ell_2 \\ &= i\hbar (-\ell_1 \ell_2 - \ell_2 \ell_1 + \ell_2 \ell_1 + \ell_1 \ell_2) = 0 \end{aligned}$$

2. Scrivere esplicitamente le matrici $J_z, J^2, J_+, J_-, J_x, J_y$ per $J = 1$

Ricordiamo le formule generali

$$\begin{aligned} J_{\pm} |j, \mu\rangle &= \sqrt{j(j+1) - \mu(\mu \pm 1)} |j, \mu \pm 1\rangle \\ J^2 |j, \mu\rangle &= j(j+1) |j, \mu\rangle \\ J_z |j, \mu\rangle &= \mu |j, \mu\rangle \end{aligned}$$

Perciò gli elementi di matrice di J_{\pm} non nulli sono dati dalle formule

$$\langle j, \mu \pm 1 | J_{\pm} | j, \mu \rangle = \sqrt{j(j+1) - \mu(\mu \pm 1)}.$$

Gli elementi di matrice sono ordinati, per convenzione, con gli indici decrescenti, ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,0} & a_{1,-1} \\ a_{0,1} & a_{0,0} & a_{0,-1} \\ a_{-1,1} & a_{-1,0} & a_{-1,-1} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} J_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & J^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ J_+ &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & J_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ J_x &= \frac{J_+ + J_-}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & J_y &= \frac{J_+ - J_-}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Trovare gli autostati di J_x per $J = 1$.

Chiamiamo $|X_{1,\nu}\rangle$ gli autostati di J_x corrispondenti ai 3 autovalori $\nu = 1, 0, -1$. È quindi

$$J^2 |X_{1,\nu}\rangle = 2 |X_{1,\nu}\rangle \quad J_x |X_{1,\nu}\rangle = \nu |X_{1,\nu}\rangle$$

Scriviamo questi autostati come sovrapposizione degli stati di J_z

$$|X_{1,\nu}\rangle = \alpha_{\nu} |1, 1\rangle + \beta_{\nu} |1, 0\rangle + \gamma_{\nu} |1, -1\rangle$$

con α, β, γ costanti da determinare, legate dalla relazione

$$|\alpha_{\nu}|^2 + |\beta_{\nu}|^2 + |\gamma_{\nu}|^2 = 1 \quad (13.3)$$

Eseguiamo esplicitamente il calcolo per $\nu = 1$; per $\nu = 0$ e $\nu = -1$ si procede in modo perfettamente analogo

$$\begin{aligned} J_x |X_{1,1}\rangle &= \frac{\alpha_1}{2} (J_+ + J_-) |1, 1\rangle + \frac{\beta_1}{2} (J_+ + J_-) |1, 0\rangle + \frac{\gamma_1}{2} (J_+ + J_-) |1, -1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + \gamma_1) |1, 0\rangle + \frac{\beta_1}{\sqrt{2}} [|1, 1\rangle + |1, -1\rangle]. \end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$J_x |X_{1,1}\rangle = \alpha_1 |1, 1\rangle + \beta_1 |1, 0\rangle + \gamma_1 |1, -1\rangle$$

da cui ricaviamo

$$\frac{\alpha_1 + \gamma_1}{\sqrt{2}} = \beta_1, \quad \alpha_1 = \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{2}}.$$

Tenendo conto della relazione (13.3), otteniamo i seguenti valori, a meno di una fase arbitraria

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}.$$

In definitiva abbiamo

$$|X_{1,1}\rangle = \frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle$$

14 Esercizi su Teoria delle perturbazioni (indipendenti dal tempo)

Ricordiamo le notazioni del Messiah:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V} \quad \hat{H}_0 |E_i^0 \alpha\rangle = E_i^0 |E_i^0 \alpha\rangle \quad (14.1)$$

(i indice di degenerazione)

$$\hat{H}(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle \quad (14.2)$$

$$E = E_a^0 + \lambda \epsilon_1 + \lambda^2 \epsilon_2 + \dots + \lambda^n \epsilon_n + \dots \quad (14.3)$$

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \lambda |1\rangle + \lambda^2 |2\rangle + \dots + \lambda^n |n\rangle + \dots \quad (14.4)$$

$$\epsilon_1 = \langle 0 | \hat{V} | 0 \rangle \quad \epsilon_2 = \langle 0 | \hat{V} | 1 \rangle = \sum_{E^0 \neq E_a^0} \frac{\sum_{\alpha} |\langle 0 | \hat{V} | E_a^0 \alpha \rangle|^2}{E_a^0 - E^0} \quad (14.5)$$

nel caso non degenerare.

1. Trovare gli autovalori dell'oscillatore armonico di carica q , sottoposto ad un campo elettrico uniforme \mathcal{E} col metodo perturbativo. Confrontare con la risoluzione esatta di questo problema fatta al paragrafo 12 n^o5, ottenuta con una trasformazione unitaria.

Sia

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 - q\mathcal{E}\hat{x} \\ E_n^0 &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (\text{autovalori non degeneri}) \end{aligned}$$

Consideriamo q come parametro perturbativo. Come al solito, le $\psi_n(x)$ indicano le autofunzioni dell'oscillatore libero. Avremo

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \langle 0 | \hat{V} | 0 \rangle = -\mathcal{E} \langle 0 | \hat{x} | 0 \rangle = -\mathcal{E} \int dx \psi_0(x) x \psi_0(x) = 0 \\ \epsilon_2 &= \langle 0 | \hat{V} | 1 \rangle = \mathcal{E}^2 \sum_{m \neq n} \frac{[\int dx \psi_m(x) x \psi_n(x)]^2}{E_n^0 - E_m^0} \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{\alpha^2} \left\{ -\frac{n+1}{2} \frac{1}{\hbar\omega} + \frac{n}{2} \frac{1}{\hbar\omega} \right\} = -\frac{\mathcal{E}^2 \hbar}{2\hbar\omega m\omega} \\ \epsilon_2 &= -\frac{\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \end{aligned}$$

Se ci fermiamo al 2° ordine dello sviluppo perturbativo, abbiamo

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2} + \dots$$

ovvero al 2° ordine troviamo il risultato esatto.

2. Determinare i livelli energetici dell'oscillatore lineare anarmonico con

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\hat{x}^2\omega^2 + \alpha\hat{x}^3 + \beta\hat{x}^4$$

Per non appesantire l'esercizio do direttamente i risultati dei seguenti integrali (che possono essere calcolati con la solita tecnica della funzione generatrice dei polinomi di Hermite).

$$\begin{aligned} \int \psi_l(x)x^3\psi_n(x) dx &= \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2} \left\{ \delta_{l,n-1} \left(\frac{9}{8}n^3\right)^{1/2} + \delta_{l,n+1} \left(\frac{9}{8}(n+1)^3\right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{l,n-3} \left(\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)\right)^{1/2} + \delta_{l,n+3} \left(\frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n+3)\right)^{1/2} \right\} \\ \int \psi_n(x)x^4\psi_n(x) dx &= \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 \frac{3}{4} (2n^2 + 2n + 1) \end{aligned}$$

Vediamo quindi subito che il termine αx^3 non dà contributo al primo ordine

$$\begin{aligned} \epsilon_1^{(\alpha)} &= \langle 0|\hat{x}^3|0\rangle = 0 \\ \epsilon_2^{(\alpha)} &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3 \left[\frac{1}{8} \frac{n(n-1)(n-2)}{3} - \frac{1}{8} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3} + \frac{9}{8}n^3 - \frac{9}{8}(n+1)^3 \right] \\ &= -\frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3 \frac{1}{8} [30n^2 + 30n + 11] \\ &= -\frac{\hbar^2}{m^3\omega^4} \frac{15}{4} \left[n^2 + n + \frac{11}{30} \right] \\ \epsilon_1^{(\beta)} &= \langle 0|\hat{x}^4|0\rangle \\ &= \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Vediamo così che le correzioni al 1° ordine del termine $\beta\hat{x}^4$ sono dello stesso ordine in \hbar di quelle del 2° ordine di $\alpha\hat{x}^3$ e quindi ci fermiamo qui (la correzione del 2° ordine del termine $\beta\hat{x}^4$ dà un contributo del tipo \hbar^3). Possiamo quindi scrivere

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - \frac{15}{4} \frac{\alpha^2 \hbar^2}{m^3\omega^4} \left(n^2 + n + \frac{11}{30} \right) + \frac{3}{2} \frac{\beta \hbar^2}{m^2\omega^2} \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^3)$$